TITLE:

パターン・ダイナミクスと漸近的方法(長期研究会「パターン形成、運動およびその統計」,研究会報告)

AUTHOR(S):

蔵本, 由紀

CITATION:
蔵本, 由紀. パターン・ダイナミクスと漸近的方法(長期研究会「パターン形成、運動およびその統計」,研究会報告). 物性研究 1989, 52(4): 366-373

ISSUE DATE:
1989-07-20

URL:
http://hdl.handle.net/2433/93648

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

パターン・ダイナミクスと漸近的方法

京都大学理学部物理学第一教室　　　　蔵本由紀

与えられた運動方程式を直接に扱うのではなく、これをいったん簡単化した上で扱う、つまり運動法則を縮約するというステップを間に入れる、ということがミクロからマクロに至るさまざまなレベルで行われており、さまざまな縮約理論が提案されている。縮約理論は、システムの自由度の一部を無視するという「代償」を払って解析を容易にしようという技術的な理由から必要とされるばかりでなく、縮約することによって質的に新しいもの、ユニバーサルなものを引き出してくるという積極的意義をももっている。ところで、運動方程式を簡単化するというのはそもそも何をやっていることになるのだろうか。更に進んで、無数の縮約理論の根底には何か共通の理論的構造があるのではないか、そしてそれを明確に取り出すことはできないだろうか。一見著しく異なった多くの縮約法が存在し、それらはなんら共通性をもたないかのようである。しかし、少し立ち入って調べてみるとわかるが、理論間の見かけ上の相違は多くの場合、縮約理論一般を構成するいくつかの基本的側面のいずれを強調するかということから生じているように思われる。本講演では、縮約の普遍構造とは何か、我々が現在知っている代表的ないくつかの縮約理論においてそれはどのような具体的現れ方をしているかということを話したい。特に、パターン・ダイナミクスの研究において広汎に用いられている位相ダイナミクス理論を批判的に検討したい。

我々が簡単化したいと思っている発展方程式を

$$dX/dt = F(X) \qquad (1)$$

としよう。Ｘは状態ベクトルであり、状態空間Ｒの一点で表されるとする。ダイナミクスを縮約するためは一般に次の二つのステップが必要である。

Ａ．Ｒの中に吸引的な不変部分空間Ｍを見いだすこと。

Ｂ．Ｍ上に適当に座標系ｓを定義すること。

方程式（１）を縮約するとは、Ｍの具体的表現とともにＭ上の発展方程式をｓに対する方程式として表現することにほかならない。即ち、（１）の縮約形は

$$X = X(s) \tag{2a}$$

$$ds/dt = g(s) \tag{2b}$$

である。ただし、以下のことに注意しよう。

* 通常、動的縮約にとって必須と考えられている「大幅に異なったタイム・スケールの共存」は原理的には必要ない。ただし、原理的にそうなのであって、具体的な縮約理論においては、おそらく近年の慣性多様体理論(1)をのぞいては例外なくタイム・スケールの分離を利用している。
* MはRそのものであってもよい。その場合には（2a）は単なる座標変換である。つまり、この場合の縮約とは、座標変換によって方程式を簡単な形に帰着せしめるということである。
* Xが自然な成分表示 $X = (X_1, X_2, X_3, \cdots)$ をもっている場合、sとしてその一成分（或は数成分）たとえば X_1 をとる場合がある。
* 縮約方程式は必然的に一階のマルコフ方程式である。

上にのべたような基本構造の具体的現れ方を見るために、以下ではいくつかの代表的な縮約理論を取り上げる。（時間の関係でこの一部に話を限るかもしれない）

［1］Liouville方程式からBoltzmann方程式を導くBogoliubovの方法(2)

［2］Boltzmann方程式から流体力学方程式を導くChapman-Enskogの方法(3)

［3］小振幅方程式の導出理論

　a．confined system の場合

　　（多重分岐に関する場合が応用上興味あり）(4),(5)

　b．extended system の場合（Newell- Whiteheadタイプの理論）(6),(7)

［4］非線形振動に関するKrylov-Bogoliubov-Mitropolskyの理論(8)

［5］準保存系に対する逓減摂動法(9)

［6］位相ダイナミクス(7)

［7］欠陥ダイナミクス(10)

このうち［3］［6］［7］は特にパターン・ダイナミクスに関係の深い方法である。縮約前後の自由度の数という点からみると上記の諸方法は三つのクラスにわかれる、即ち有限→有限、無限→有限、無限→無限の三タイプである。上記7

つの方法はすべて漸近的方法である。すなわち、出発点となる非摂動系というものが各々の場合に考えられ、そこでは無限に長いタイム・スケールをもつ自由度が存在する。この点にも注意しながら、以下では各方法に対して若干のコメントを加えよう。

［１］縮約を行うべき方程式（１）としてLiouville 方程式そのものではなくてＢＢＧＫＹ方程式を採る。したがってＸは各種モーメントを成分とする自然な表示$X=(f_1, f_2\cdots\cdots)$をもっている。ここにf_nはｎ次のモーメントである。Ｍを表示すべきパラメターｓとして f_1（以下単にｆと記す）を採る。すると、式（２ａ）が意味するところは、各時刻で２次以上のすべてのモーメントが一義的にｆに関係づけられること、即ちこれはBogoliubov のfunctional ansatzにほかならない。このようにBogoliubovのansatzは、すべてのモーメントで張られるとてつもなく大きい関数空間において、ｆの関数空間と同程度の大きさをもつ吸引的な不変部分空間が存在するという主張にほかならない。Ｍ上の時間発展は（２ｂ）つまりｆに関する閉じマルコフ的な方程式によって記述される。これがBoltzmann 方程式等の輸送方程式である。Ｍの吸引性によって、殆どすべての初期条件の下に軌道はＭに漸近する。反発的な不変部分空間が存在するとしても、その上での発展はＨ関数が増大する逆Boltzmann 型の方程式に対応するであろう。希薄ガスに対しては逐次近似的にＭがあらわな形で求められ、非自明な最低次の近似としてBoltzmann 方程式が得られることは言うまでもないだろう。また、以上の議論からinitial stage やkinetic stage の幾何学的意味もおのずと明らかであろう。

［２］状態ベクトルＸはここでは一体分布関数ｆであり、縮約すべき式（１）はBoltzmann 方程式である。関数空間Ｒには自明な不変部分空間としてｆの平衡分布（Maxwell 分布）の全体がつくる５次元の空間がある。これが５次元となるのはMaxwell分布

$$f=n(m/2\pi kT)^{3/2}\exp(-m|v-c|^2/2kT)$$

が５つの任意パラメタ、即ち平均密度n、平均速度ベクトルc、温度Ｔを含むからである。この不変部分空間を含むより大きい不変空間Ｍを見出せれば Boltzmann方程式の縮約が可能である。直観的には、局所平衡分布の全体が作る空間M_0が近似的にＭを与えるのではないかと考えられよう。M_0上の座標sはspace-depend entな関数の組（n, c, T）であり、MをM$_0$によって近似すればその上の発展方程式（2 b）は（衝突項が恒等的に0となるから）理想流体に対する Euler方程式となる。実際にはドリフト項が摂動として働いて、真の不変空間MはM$_0$ からわずかにゆがむ。M上の発展方程式を表現するためにはMに座標系を導入する必要があり、M$_0$ 上の各点とM上の各点を一対一に対応させることによってこれを行う。（表現の仕方は全く異なるが、Chapmann-Enskog 理論では事実上これをやったことになっている。）この対応のさせ方は自由であるが、対応する二つのfが同一のモーメント$\langle v^0 \rangle$、$\langle v_1 \rangle$、$\langle v^2 \rangle$ をもつことを要求すれば一義的に定まる。これによってM上の運動は一義的にM$_0$ 上に射映され、第一近似として粘性項と熱拡散項をもつ通常の流体力学的方程式が得られる。

［3］a. confined system の場合

この場合は有限自由度（事実上は小数自由度）の常微分方程式系が縮約すべき系になる。系は分岐パラメタμをもち、$\mu<0$で定常解が安定、$\mu>0$で不安定とする。分岐点$\mu=0$における線形化方程式系を非摂動系と考える。非摂動系の固有値のいくつかは0の実部をもつ。これらに対応する一般化固有ベクトルの張る空間M$_0$が非摂動系の不変部分空間になっている。M$_0$上の自然な座標系sとして、これらの臨界固有モードの振幅をとることができ、 sに対するダイナミクスはsingularな線形ベクトル場によって表される。$\mu\neq0$の効果と非線形効果をともに摂動と考え、真の不変空間M（center manifold と呼ぶ）とそこでのベクトル場を摂動的に求めてゆくことができる。このとき、M上に座標系を定めること、即ちM$_0$ 上の各点とM上の各点を一対一に対応させることが必要となる。不変空間の次元が高くなるほど、つまり分岐の多重度が高くなるほどこの対応のさせかたはnon-trivial となる。つまり“上手に”対応させるとM上のベクトル場は簡単な表式をもつのに、“下手な”対応のさせかたをするとはなはだ複雑になる。その意味で“ベスト”な対応を系統的に得るための理論がnormal form theoryと呼ばれている理論であり、多重分岐理論の中核をなしている。

b. extended system の場合

典型的な場合として反応拡散系における複素Ginzburg-Landau 方程式の導出を考えよう。つまり、分岐を示す同等な多くのlocal systems が拡散結合している場合である。上記aの場合と異なるのは分岐点からのずれと非線形性に加えて、

拡散項が摂動となることである。aの場合、非摂動系の中立的不変空間M_0はsによってパラメトリックに表示されていたが、sをspace-dependent と仮定してM_0を関数空間へと拡張する。これはちょうどBoltzmann方程式の平衡解をパラメトライズする5つの量に空間依存性を仮定して局所平衡分布の空間へ移ることと全くパラレルである。このように拡張された非摂動系の不変空間M_0が上に述べた3種類の摂動によってどのような変形を受けるか、それと同時に不変空間上の発展方程式がどのように修正を受けてゆくか、これを逐次代入によって解いてゆけばよい。

［4］典型的には次のような2変数系を縮約する問題である。

$$du/dt-\omega_0 v=0$$

$$dv/dt+\omega_0 u=\varepsilon f(u,v)$$

これは弱い摂動を受けた線形振動子であり、自由度をこれ以上縮約することはできない。つまり、R＝Mのケースであり、縮約問題は単に座標変換の問題である。$u=a\cdot\cos\phi$、$v=a\cdot\sin\phi$ と置き、極座標（a, ϕ）から新しい極座標（b, ϕ）へ移って上記方程式が

$$db/dt=A(b),\quad d\phi/dt=\omega_0+\sigma(b)$$

なる形をとるようにするのである。このような座標変換はnear-identity transformation である。なぜなら$\varepsilon=0$ならば恒等変換となることは自明だから。

［5］この場合保存系に近いにも拘らずなぜ縮約が可能かという問題が重要である。状態空間Rの中に吸引的な不変空間Mなるものが存在しうるのだろうか？

弱い分散をもつ媒質における非線形方程式

$$\partial X/dt+A\cdot\partial_x X=f(X;\partial_x)$$

を考えよう。Aは実固有値をもつ係数行列とし、fは非線形性、分散、散逸等の効果を含んでいるとする。f＝0とした非摂動系の一般解はAの固有成分の重ね合わせとして

$$X(x,t)=\Sigma_l s_l(x-\lambda_l t)u_l$$

と書ける。ただし、λ_l、u_lはAのl番目固有値と固有ベクトルである。各固有成分は初期の波形を保ちながら固有の速度で伝播する。したがって時間が充分に経過すると固有成分は互いに分離する。したがってわれわれは一つの成分に着目できる。空間Rの中に関数空間としての固有空間M_{0l}（l＝1, 2, ・・・）を

考えることができ、各固有空間の座標は“関数” s（z）である。非摂動系は保存系であるから、それぞれの固有空間は吸引的ではありえないが、上のような分離機構によって事実上吸引的となっている。着目された一つの固有空間が摂動 f によってどのように曲がるか、その上の運動即ち s の発展がどのように非中立的になるかを逐次的に求める、それが逓減摂動法であるという見方をとりたい。強い分散をもつ媒質にたいしても事情は本質的に同じである。

［6］位相ダイナミクスは系の連続対称性を破るパターンの存在下で適用される方法である。位相ダイナミクスに限らず他の漸近的縮約法においても例外なく言えることだが、出発点となる非摂動系は特性時間∞の中立モードを含んでいる。位相ダイナミクスではGoldstone modeが中立モードになっている。このモードがパターンのゆるやかな歪みを摂動として感じつつ緩慢な運動を行うのである。連続対称性を破るパターンは必ずしも空間パターンに限らない。自励発振は時間的並進対称性を破っており、そこに振動の位相という中立モードが現れる。この中立モードを起点にして、弱い摂動を受けた自励発振系を位相ダイナミクスの方法によって取り扱うことができる。弱く相互結合した非線形振動子の大集団のダイナミクスへの適用は中でも重要なものである。その他、この方法は large scale の空間変調を受けた周期的パターン、振動媒質、wavefront などのダイナミクスに適用される。方法的には特に［2］［3b］との類似性が著しい。

［7］双安定系におけるkink-antikink 列や興奮系におけるパルス列のダイナミクスに適用される方法である。キンクやパルスを質点のように扱うので、これは無限自由度→有限自由度タイプの縮約法である。実用上はたいがい非自明な最低近似で充分であるが、理論の完成度から言えば［1］～［6］と違って摂動の任意次数まで計算可能な一般論の体をなしているとは言いがたい。

数学的には以上の漸近理論はすべて非斉次一次方程式を解く問題に帰着される。最低近似では非斉次項は既知であり、最低次の解を非斉次項に代入して再び一次方程式を解く云々という構造である。したがって摂動としてなにをとるかということさえ決めてやれば、解を機械的に逐次展開できる。種々の展開項のうち、いずれを残しいずれを無視するかという問題は全く独立な問題として切り離すことができることに注意しよう。しかるに、小さいパラメタ ε によって種々の量をど

の様にスケールすべきかといった議論をよく見かける。これは解の形式的展開を行ったあとに考察すべき問題として切り離すべき問題であると思われるのに、とかく問題の二つのレベルを同時進行的に扱うために理論が非常にわかりにくくなっていると思われるのである。ところで、上記の一次方程式の解は一義的ではない。これを一義的にすることと、M0 上の各点とM上の各点の対応関係を設定することとは等価である。言い替えるなら、この任意性があるおかげでM上の発展則を最も簡単な形に表現することが可能となるのである。 normal form theory なるものが存在しうるのもこの任意性のゆえである。

上に見たように、漸近的縮約理論においては、起点となる中立モードの存在が前提となる。ところが、物理において最も普遍的に現れる中立モードは3種類あると思われる。それらは、（1）エネルギー、運動量などの保存量、あるいは保存系における全自由度の数だけの保存量（2）安定性の変化に際して現れる臨界モード（3）連続対称性の破れた系に存在するゴールドストーン・モード、の3つである。上に掲げた7つの理論はいずれもこれら3つのうちのどれかを利用している。「中立モードのあるところに縮約理論あり」と言えそうである。このことが正しければ当然異種の中立モードが共存する場合に対応する縮約理論があってしかるべきある。例えば、組合せ（1、2）（2、3）（3、1）が考えられる。（1、2）タイプは事実近年のホットな話題と関係があり、Newell-Whitehead 理論の誤りを論じたZipperius-Siggia の理論[11]がそれである。つまり、Newell- Whitehead は分岐に際しての臨界モードのみを考えて小振幅方程式を導出したのであるが、実はシステムはもうひとつの中立モード即ち Navier-Stokes 方程式のガリレイ不変性（つまり運動量の保存則）からくるものがあり、これが臨界モードとカップルすることによってシステムの挙動を全く一変してしまうのだ。（2、3）タイプに対してはまともな理論は未だ見あたらないが、このふたつの中立モードの絡みからskewed-varicose instability と呼ばれるロール状対流パターンの不安定化が起こり、extended system における乱流発生の普遍的道筋の一つとなっていることが知られている。またFrisch等[12]は二つのadditive な保存量をもつ位相乱流のモデル方程式から得られる周期パターンに位相ダイナミクスの方法を適用することによって、位相乱流の乱流粘性係数を近似的に評価

しているが、これも(2、3)タイプの理論と見なされる。(3、1)タイプの現象は私の知る限りでは同定できる実験的報告はない。しかし、理論モデルではいくつか見いだされており、例えば二成分反応拡散系に対して得られた定常な周期構造(各ピークは左右対称)が分岐パラメタのある値を境にして非対称に自発的変形を起こし、それと同時にゆっくりとした滑り運動が開始される場合があるということが知られているが、それはこのタイプに属する現象である。今後この方面での実験的理論的研究が期待されるところである。

参考文献

(1) P.Constaitin, C.Foias, B.Nikolaenko, R.Temam, Integral Manifolds and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations, Springer-Verlag, (1989)

(2) N.N.Bogoliubov, in Studies in Statistical Mechanics Vol.1, ed.J.de Boer and G.E.Uhlenbeck, North-Holland, (1962)

(3) S.Chapman and T.G.Cowling, The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases (3rd ed.) Cambridge Univ. Press (1970)

(4) J.Guckenheimer and P.Holms, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag (1984)

(5) P.H.Coullet and E.A.Spiegel, SIAM J. Appl. Math. 43 (1983), 776.

(6) A.C.Newell and J.A.Whitehead, J. Fluid Mech. 38 (1969) 279.

(7) Y.Kuramoto, Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence, Springer-Verlag (1984)

(8) N.N.Bogoliubov and Y.A.Mitropolsky, Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations, Gordon and Breach (1961)
See also: A.H.Nayfeh, Perturbation Methods, Wiley (1973)

(9) T.Taniuti, Prog. Theor. Phys. Suppl. 55 (1974) 1.

(10) K.Kawasaki and T.Ohta, Physica 116A (1982) 573.
P.Coullet, C.Elphick and D.Repaux, in Propagation in Systems Far from Equilibrium, Springer-Verlag (1988) 185.

(11) E.D.Siggia and A.Zipperius, Phys. Rev. Lett. 47 (1981) 835.

(12) U.Frisch, Z.S.She and O.Thual, J. Fluid Mech. 168 (1986) 221.